**1.** Во сколько раз отличаются энергетические потери протонов и K+-мезонов с кинетической энергией T = 100 МэВ в алюминиевой фольге толщиной 1 мм?

    Величина удельных ионизационных потерь энергии dT/dx для тяжелых заряженных частиц (при условии E << (Mc2 )/me), где M и me - массы тяжелой частицы и электрона, определяется соотношением

 

где z - заряд частицы, β = v/c (v - скорость частицы), Z, A - заряд и массовое число ядер вещества среды, d - плотность вещества среды в г/см3.
    Так как заряды протона и K+- мезона одинаковы, то отношение потерь будет зависеть только от скоростей частиц, а точнее от 2 = v2/c2:



Полная энергия частицы

 ,

откуда

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| http://nuclphys.sinp.msu.ru/problems/Images/pr96_04.gif | и | http://nuclphys.sinp.msu.ru/problems/Images/pr96_05.gif | . |

Отношение кинетической энергии частицы T к энергии покоя mc2 обозначим как α, тогда

 

Для протонов

|  |  |
| --- | --- |
| α  = 100 МэВ/938.3 МэВ = 0.1066, | http://nuclphys.sinp.msu.ru/problems/Images/pr96_07.gif |

Для K+-мезонов

|  |  |
| --- | --- |
| α  = 100 МэВ/493.6 МэВ = 0.2026, | http://nuclphys.sinp.msu.ru/problems/Images/pr96_08.gif |

Отношение потерь для протонов и K+-мезонов:



**2.** Пучок протонов с кинетической энергией T = 500 МэВ и током I = 1 мА проходит через медную пластину толщиной D = 1 см. Рассчитать мощность W, рассеиваемую пучком в пластине.

    Определим энергию, которую теряет один протон в пластине. Для протонов с кинетической энергией T = 500 МэВ величина α (см. предыдущую задачу) будет

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| alpha1.gif (54 bytes) = T/mc2 = 500 МэВ/938.3 МэВ = 0.533 | и тогда | http://nuclphys.sinp.msu.ru/problems/Images/pr97_1.gif |

Удельные ионизационные потери протонов в меди будут (также см. предыдущую задачу)

 

Мощность, рассеиваемая пучком в пластине





**3.** Определить удельные ионизационные потери мюонов в алюминии, если их кинетическая энергия равна: 1) 50 МэВ, 2) 100 МэВ, 3) 500 МэВ.

    Отношение кинетической энергии частицы к энергии покоя обозначим как α, тогда



ρAl = 2.7 г/см3. Используем формулу 4

,

тогда 1) для E = 50 МэВ: β2 = 0.539 и



2) для E = 100 МэВ: β2 = 0.736 и

dE/dx ≈ 5.1 МэВ/см,

3) для E = 500 МэВ: β2 = 0.97 и

dE/dx ≈ 4.8 МэВ/см.

**4.** Рассчитать удельные ионизационные потери энергии для протонов с энергией 10 МэВ в алюминии.

    Полная энергия частицы

 ,

откуда

 и  .

Отношение кинетической энергии частицы T к энергии покоя Mc2 обозначим как α, тогда



α = 10 МэВ/938.3 МэВ = 0.0107, β2 = 0.021, ρAl = 2.7 г/см3.
Подставляя найденные значения в формулу ([4](http://nuclphys.sinp.msu.ru/partmat/pm01.htm#(4))), получаем:

 = 92.314 МэВ/см.

    Обратим внимание, что вклад последнего члена в скобках очень мал и им можно пренебречь при небольших кинетических энергиях частиц.
    При анализе формулы (1) также можно заметить, что при β2 << 1 два последних слагаемых являются малыми поправками к первому и взаимно компенсируют друг друга. Действительно, используя разложение в ряд Тейлора, можно получить:

ln(1 − β2) − β2 = −(−β2 + β4/2 +...) − β2≈ −β4/2→ 0  при β2 << 1.

Проиллюстрируем это, проведя расчет вышеописанной задачи по формуле ([3](http://nuclphys.sinp.msu.ru/partmat/pm01.htm#(3))). Получим тот же результат: 92.314 МэВ/см, при этом вклад каждого из членов формулы

92.310 МэВ/см
0.407 МэВ/см
-0.403 МэВ/см

Можно показать, что роль двух последних слагаемых становится заметной, когда кинетическая энергия частицы превышает ее энергию покоя.

**5.** Определить удельные ионизационные потери протонов в алюминии, если их кинетическая энергия равна: 1) 1 МэВ, 2) 10 МэВ, 3) 100 МэВ, 4) 500 МэВ, 4) 1 ГэВ.

    Расчеты по формуле ([4](http://nuclphys.sinp.msu.ru/partmat/pm01.htm#4)) показывают, что с ростом энергии протона его удельные потери энергии на ионизацию вначале резко падают, а начиная с некоторой (более 500 МэВ) энергии выходят на насыщение. Рассчитаем значения в нескольких точках (они отмечены на графике):



1 МэВ: -dE/dx = 477 МэВ/см,
10 МэВ: -dE/dx = 92 МэВ/см,
100 МэВ: -dE/dx = 15 МэВ/см,
500 МэВ: -dE/dx = 6 МэВ/см,
1 ГэВ: -dE/dx = 5 МэВ/см

**6.** Рассчитать отношение удельных ионизационных потерь протонов и α-частиц с одинаковой кинетической энергией 10 МэВ в железе.

    Из формулы ([1](http://nuclphys.sinp.msu.ru/partmat/pm01.htm#(1))) видно, что удельные ионизационные потери тяжелых частиц пропорциональны квадрату заряда частицы. Поэтому для частиц с разным Z, движущихся в одной и той же среде с одной и той же скоростью v0 (то есть одной и той же величиной β2), отношение удельных потерь дается выражением:

,

где Z1 и Z2 − заряды первой и второй частиц.
При использовании в расчетах не скорости, а кинетической энергии частиц необходимо учесть, что квадраты скоростей частиц соотносятся обратно пропорционально их массам (β2 = 2E/mc2). Поэтому формула для отношения удельных ионизационных потерь будет немного более громоздкой.
    Рассчитаем величину потерь протонов и альфа-частиц с одинаковой кинетической энергией
10 МэВ в железе.
    Используя преобразованную формулу (2) и пренебрегая в ней последним слагаемым (вследствие его малости при данных β2), запишем:



То есть альфа-частица, обладая той же кинетической энергией и лишь вдвое большим зарядом, теряет на ионизацию в 10 раз больше энергии, чем протон.
 4 (при энергии 1 МэВ)
 7 (при энергии 1000 МэВ)

 **7.** Рассчитать отношение удельных ионизационных потерь для протонов с энергией 10 МэВ в углероде и свинце.

α = 10 МэВ/938.3 МэВ = 0.01066 ([см. задачу 4](http://nuclphys.sinp.msu.ru/problems/a8_04.htm))

ρC = 2.25 г/см3 (углерод в форме графита)
ρPb = 11.34 г/см3



**8.** Определить удельные ионизационные потери и среднее число ионов на 1 см пробега в воздухе для α-частицы с энергией 10 МэВ. На образование одного иона в воздухе необходимо ≈ 35 МэВ.

    Для воздуха: Z = 7, A = 14, плотность ρ = 1.29·10-3 г/см3.
Масса альфа-частицы М = 3727 МэВ.
    Используя те же обозначения, что и в предыдущих задачах, получаем:
α = 10 МэВ / 3727 МэВ = 0.0027, β2 = 0.0053.

6.1·105 эВ/см = 0.61 МэВ/см.

Среднее число ионов, образующихся на 1 см пробега альфа-частицы:
N = (dE/dx)α/35 МэВ = 1.74·104 ионов/см.

**9.** Энергия протонов в ускорителе 100 МэВ. Подсчитать толщину поглотителя из углерода, необходимую для снижения энергии пучка протонов до 20 МэВ.

    Как следует из формулы ([3](http://nuclphys.sinp.msu.ru/partmat/pm01.htm#3)), удельные ионизационные потери частиц в веществе зависят от их кинетической энергии:

dE/dx = ƒ(E).

По мере прохождения частиц в веществе их кинетическая энергия уменьшается. Поэтому для того, чтобы рассчитать потери в достаточно толстом поглотителе (таком, что теряемая при его прохождении энергия ΔE по порядку величины сопоставима с величиной начальной энергии частиц Е), нужно проинтегрировать потери по всей толщине вещества:

ΔE = ∫ƒ(E)dx.

Так как зависимость ƒ(Е) достаточно сложная, вычислить такой интеграл аналитически затруднительно (см. формулу ([3](http://nuclphys.sinp.msu.ru/partmat/pm01.htm#3))). Можно посчитать его численно, разбив всю толщину поглотителя на n малых частей толщиной dxi и заменив интеграл суммой:

,

где Ei – энергия частиц, прошедших в поглотителе расстояние xi (см. рисунок).



Так как разбиение производится на части равной толщины, т.е. dxi ≡ dx, в данной задаче требуется найти число отрезков разбиения n, такое, что на толщине поглотителя Δx = n·dx будет потеряна заданная энергия ΔE = E – En.
Для данной задачи E = 100 МэВ, En = 20 МэВ, ΔE = 80 МэВ, поглотитель – углерод (Z = 6, A = 12,
ρ = 2.25 г/см3).
В результате численных расчетов находим, что Δx = 3.6 см.

**10.** Рассчитать удельные ионизационные потери энергии в алюминии электронов с энергиями
1 МэВ, 100 МэВ и 1 ГэВ.

α = E/mec2, . [(см. 4)](http://nuclphys.sinp.msu.ru/problems/a8_04.htm)
Имеем:
α = 1 МэВ/0.511 МэВ ≈ 1.96, β2 ≈ 0.886.
α = 100 МэВ/0.511 МэВ ≈ 196, β2 ≈ 1.
α = 1000 МэВ/0.511 МэВ ≈ 1960, β2 ≈ 1.
Подставляя найденные в формулу для удельных ионизационных потерь, приведенную выше, получаем:

1 МэВ: |dE/dx| ≈ 4 МэВ/см; 100 МэВ: |dE/dx| ≈ 6.4 МэВ/см; 1 ГэВ: |dE/dx| ≈ 7.9 МэВ/см;

Эти точки отмечены на графике, приведенном ниже.



**11.**  Оценить отношение удельных ионизационных потерь в железе для протонов и электронов с энергиями: 10 МэВ, 100 МэВ и 1 ГэВ.

Учтем, что при данных энергиях электронов . Следовательно, в формуле удельных ионизационных потерь можно пренебречь поправочными слагаемыми и оставить только первое слагаемое в скобках. Поэтому



[(dEp/dx)/(dEe/dx)]10 МэВ ≈ 17.5;
[(dEp/dx)/(dEe/dx)]100 МэВ ≈ 2.4;
[(dEp/dx)/(dEe/dx)]1 ГэВ ≈ 0.6.

**12.**   Рассчитать удельные радиационные потери в медном поглотителе электронов с энергиями
20 МэВ и 1 ГэВ.

Используем формулы (3.5.2)-(3.5.4) удельных радиационных потерь электронов. Концентрация атомов вещества  n = ρNA/A (NA – число Авогадро, А – массовое число ядер вещества среды, ρ – плотность вещества среды). Для меди Z = 29, A = 64, плотность 8.93 г/см3. Получаем:
1) Энергия электронов Е = 20 МэВ. α = E/mec2 = 39.14. Поскольку 1< 39.14 < 137Z-1.3 = 44.6, используем формулу ([3](http://nuclphys.sinp.msu.ru/partmat/pm02.htm#eq)):



2) Энергия электронов Е = 1 ГэВ, α = 1957. Поскольку 1957 > 137Z-1.3 = 44.6 используем формулу ([4](http://nuclphys.sinp.msu.ru/partmat/pm02.htm#eq)):



**13.** Определить удельные радиационные потери при прохождении электронов с энергией 50 МэВ через алюминиевую мишень и сравнить их с удельными потерями на ионизацию.

Для алюминия 137/Z1/3 ≈ 58 < E/(mec2) ≈ 98. Поэтому используем формулу ([4](http://nuclphys.sinp.msu.ru/partmat/pm02.htm#eq)) для удельных радиационных потерь:



    Для ионизационных потерь находим (учитывая, что β2 ≈ 1 при энергии электронов МэВ):

(dE/dx)иониз = -6 МэВ/см.

Таким образом,

(dE/dx)иониз/(dE/dx)рад ≈ 1.2.

Ионизационные потери близки к радиационным, так как энергия 50 МэВ для электронов в алюминии близка к [критической](http://nuclphys.sinp.msu.ru/partmat/pm02.htm#4). Критическая энергия Eкр(Al) ≈ 42.7 МэВ.

**14.**  Электроны и протоны с энергией Е = 100 МэВ падают на алюминиевую пластинку толщиной
Δx = 5 мм. Определить энергии электронов и протонов на выходе пластинки.

Используя данные задач [8.10](http://nuclphys.sinp.msu.ru/problems/a8_10.htm) и [8.13](http://nuclphys.sinp.msu.ru/problems/a8_13.htm) , получаем следующие суммарные потери (ионизационные + радиационные) электронов при прохождении пластинки:

Δ Ee = [|dE/dx|иониз + |dE/dx|рад]·Δ x = (6.4 + 2· 5.2)· 0.5 = 8.4 МэВ.

Удельные ионизационные потери протонов с Е МэВ при прохождении алюминиевой пластинки определены в задаче [8.5](http://nuclphys.sinp.msu.ru/problems/a8_05.htm). Было получено | dEp/dx |иониз = 15 МэВ / см. Поэтому

Δ Ep = 15· 0.5 = 7.5 МэВ.

Итак,

(Ee)вых = E − ΔEe = (100 − 8.4) = 91.6 МэВ ,
(Ep)вых = E − ΔEp = (100 − 7.5) = 92.5 МэВ .

**15.**  Определить энергию Е0 электронов на входе в свинцовую пластину толщиной Δx = 0.1 см, если на её выходе энергия электронов равна Е = 3 МэВ.

В области энергий электронов E > 3 МэВ их ионизационные потери очень плавно возрастают с увеличением энергии. Радиационные потери при таких энергиях в несколько раз меньше ионизационных. Расчёт дает

|dE/dx|рад =  3.2 МэВ,
|dE/dx|иониз =  11.9 МэВ.

     Однако радиационные потери быстро возрастают с увеличением энергии и поэтому имеют заметное влияние на результат. Для точного расчета необходимо прибегнуть к численному интегрированию, разбив толщину свинцовой мишени на малые отрезки Δxi и, учитывая зависимость потерь от энергии, получить полные потери при прохождении пластинки путем сложения потерь на каждом отрезке. В результате можно получить



**16.** Определить критические энергии электронов для углерода, алюминия, железа, свинца.

Используем для определения критической энергии [аппроксимацию](http://nuclphys.sinp.msu.ru/partmat/pm02.htm#(3)) Eкрит = 610/(Z + 1.24), тогда
для C: Eкрит = 610/( 6 + 1.24) ≈ 84.3 МэВ,
для Al: Eкрит = 610/(13 + 1.24) ≈ 42.83 МэВ,
для Fe: Eкрит = 610/(26 + 1.24) ≈ 22 . 39 МэВ,
для Pb: Eкрит = 610/(82 + 1.24) ≈ 7.33 МэВ .

**17.** Рассчитать отношение удельных ионизационных и радиационных потерь в алюминии для электронов с энергиями: 10 и 100 МэВ.

Полагаем при данных энергиях β2 ≈ 1 и используем для вычисления (dE/dx)иониз [формулу (1](http://nuclphys.sinp.msu.ru/partmat/pm02.htm#eq1)).
1) Энергия электронов Е = 10 МэВ. E/mec2 ≈ 20. Поскольку 1 < 20 < 137/Z1/3 ≈ 58 используем для(dE/dx)рад [формулу (3)](http://nuclphys.sinp.msu.ru/partmat/pm02.htm#eq):



2) Энергия электронов Е = 100 МэВ. Необходимые вычисления удельных потерь энергии в алюминии для электронов с Е = 100 МэВ содержатся в задачах [8.10](http://nuclphys.sinp.msu.ru/problems/a8_10.htm), [8.13](http://nuclphys.sinp.msu.ru/problems/a8_13.htm) и [8.14](http://nuclphys.sinp.msu.ru/problems/a8_14.htm).
(dE/dx)иониз = 6.4 МэВ/см, (dE/dx)рад = 2·5.2 = 10.4 МэВ/см. Поэтому

(dE/dx)иониз/(dE/dx)рад ≈ 0.6.

**18.**  Оценить полные удельные потери энергии электронов с энергией 150 МэВ в алюминии и свинце.

Используя формулы [1](http://nuclphys.sinp.msu.ru/partmat/pm02.htm#eq1), [2, 3, 4](http://nuclphys.sinp.msu.ru/partmat/pm02.htm#eq), получим:

в алюминии: dE/dx = (dE/dx)иониз + (dE/dx)рад ≈ 7 + 15.6 = 22.6 МэВ/см,
в свинце: dE/dx  ≈ 310 МэВ/см.

**19.** Электрон с энергией 10 ГэВ проходит через алюминиевую пластину толщиной Δx = 1 см. Какую энергию он при этом теряет?

Расчёты с использованием формул для удельных ионизационных и радиационных потерь электронов даёт следующий результат о потерянной электроном в пластине суммарной энергии:

 ΔE = [(dE/dx)иониз + (dE/dx)рад]·Δx ≈ (9 + 1027)·1 = 1036 МэВ ≈ 1 ГэВ.

**19.** Электрон с энергией 10 ГэВ проходит через алюминиевую пластину толщиной Δx = 1 см. Какую энергию он при этом теряет?

Расчёты с использованием формул для удельных ионизационных и радиационных потерь электронов даёт следующий результат о потерянной электроном в пластине суммарной энергии:

 ΔE = [(dE/dx)иониз + (dE/dx)рад]·Δx ≈ (9 + 1027)·1 = 1036 МэВ ≈ 1 ГэВ.

**20.** Рассчитать экстраполированные пробеги в см в алюминии электронов с энергиями 1, 2 и 10 МэВ.

Экстраполированный пробег электронов с энергией Е > 0.8 МэВ в алюминии рассчитывается по формуле

Rэ(Al) = (0.54Е - 0.133) г/см2.

При этом Rэ(г/см2) = Rэ(см)ρ, где ρ − плотность поглотителя (для алюминия она 2.7 г/см2). Отсюда экстраполированные пробеги электронов в см в алюминии следующие:

Rэ(Al) = (0.54×1 − 0.133)/2.7 = 0.15 см (Е = 1 МэВ),
Rэ(Al) = (0.54×2 − 0,133)/2.7 = 0.35 см (Е = 2 МэВ),
Rэ(Al) = (0.54×10 − 0,133)/2.7 = 1.95 см (Е = 10 МэВ).

**21.** Какова энергия электронов, имеющих ту же длину пробега в алюминии, что и протоны с энергией 20 МэВ?

Протон с энергией 20 МэВ имеет в алюминии пробег 0.27 см ([см. таблицу 2](http://nuclphys.sinp.msu.ru/partmat/pm01.htm#Таблица_2)). Экстраполированный пробег в см в алюминии электрона с энергией Е > 0.8 МэВ определяется формулой
Rэ(Al) = (0.54Е − 0.133)/2.7. По условию задачи должно быть Rэ = Rp. Откуда

Е = [2.7·Rp (см) + 0.133]/0.54 МэВ = [2.7·0.27 0.133]/0.54 = 1.6 МэВ.